1. El espacio $\mathbb{R}^n$

En el presente libro, salvo que se indique lo contrario, se considera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ y $m \geq 1$.

DEFINICIÓN 1: El conjunto $\mathbb{R}^n$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}},$$

es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Por notación, si $y \in \mathbb{R}^n$, se asumirá $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.



PROPOSICIÓN 1 (Igualdad en $\mathbb{R}^n$). Dados dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$x = y \qquad \text{si y solo si} \qquad x_i = y_i$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINICIÓN 2: Operaciones en $\mathbb{R}^n$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se define

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

y

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

TEOREMA 2

La tripleta $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real de dimensión n.

DEFINICIÓN 3: Base canónica

En $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, definido por

$$e^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es una base. Se la denomina *base canónica*.

DEFINICIÓN 4: Producto escalar, norma y distancia

La función

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y se lo denomina el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Además, la función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x \cdot x} \end{aligned}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$ y se la denomina la norma usual de $\mathbb{R}^n$. Finalmente, a la función

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

se la llama distancia usual de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 5: Vector unitario

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que x es un vector unitario si $\|x\| = 1$.

TEOREMA 3: Desigualdad de Cauchy

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

PROPOSICIÓN 4 (Desigualdad Triangular)**.** Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

PROPOSICIÓN 5 (Propiedades de la distancia). Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

DEFINICIÓN 6: Ángulo entre vectores

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, ambos diferentes de 0, se define el ángulo entre estos vectores por

$$\arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\,\|y\|}\right).$$

DEFINICIÓN 7: Ortogonalidad entre vectores

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se dice que son ortogonales si $x \cdot y = 0$.

DEFINICIÓN 8: Proyección ortogonal

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, la proyección ortogonal de x sobre y es

$$\operatorname{proy}_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$

y la componente normal de x respecto a y es

$$\operatorname{norm}_y(x) = x - \operatorname{proy}_y(x).$$

Dado un vector x de $\mathbb{R}^n$, a la matriz $n \times 1$ de coordenadas en la base canónica de x se la representa por $[x]$. Así:

$$[(x_1, x_2, \ldots x_n)] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 6: Teorema de representación

Si $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m > 1$, es una aplicación lineal, entonces existe un único elemento de $\mathbb{R}^{n\times m}$, denotado por $[F]$ tal que

$$[F(x)] = [F][x],$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde el término de la derecha debe ser entendido como multiplicación de matrices.

EJEMPLO 1. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3); \end{aligned}$$

se tiene que

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} [x] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

No hay ninguna diferencia entre un vector vertical u horizontal. En el caso de las matrices es importante notar que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

DEFINICIÓN 9

En $\mathbb{R}^3$, notaremos

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \qquad \mathbf{j} = (0,1,0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = (0,0,1).$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, se define el *producto cruz* de x y y por

$$\begin{aligned} x \times y &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

PROPOSICIÓN 7. Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, x es ortogonal a $x \times y$. Además

$$x \times y = -y \times x.$$

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, se tiene que:

- El volumen del paralelepípedo formado por x, y, z es $|x \cdot (y \times z)|$.
- El área del paralelogramo determinado por x, y es $\|x \times y\|$.
- Si x es la velocidad de un fluido y y, z determinan un paralelogramo, entonces $x \cdot (y \times z)$ representa el volumen de fluido que atravesó el paralelogramo en una unidad de tiempo.

PROPOSICIÓN 8. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes, entonces

$$x \cdot (y \times z) = 0.$$

2. GEOMETRÍA DE $\mathbb{R}^n$

DEFINICIÓN 10: Recta de $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$, la recta que pasa por a con dirección b es el conjunto

$$L(a; b) = \{a + \alpha b : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINICIÓN 11: Plano de $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, con b y c linealmente independientes, el plano que pasa por a con dirección b y c es el conjunto

$$P(a; b, c) = \{a + \alpha b + \beta c : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINICIÓN 12

En $\mathbb{R}^n$, dados $a, b, c, d, b^1, \ldots, b^{n-1}, d^1, \ldots, d^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ se dice que:

- Las rectas $L(a; b)$ y $L(c; d)$ son paralelas si $L(0; b) = L(0; d)$; es decir si b y d son múltiplos.
- Los planos $P(a; b^1, b^2)$ y $P(c; d^1, d^2)$ son paralelos si $P(0; b^1, b^2) = P(0; d^1, d^2)$; es decir si sus envolventes lineales coínciden

$$\langle \{b^1, b^2\} \rangle = \langle \{d^1, d^2\} \rangle$$

PROPOSICIÓN 9. Dados dos puntos $a, b \in \mathbb{R}^n$ distintos, existe una única recta que pasa por a y b y esta es

$$L(a; b - a).$$

PROPOSICIÓN 10. Dados tres puntos $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ que no pertenecen a la misma recta, existe un único plano que pasa por a, b y c y este es

$$P(a; b - a, c - a).$$

DEFINICIÓN 13

En $\mathbb{R}^n$, dadas una recta o plano H y $r \in \mathbb{R}^n$, se dice que r es ortogonal a H si para todo $a, b \in H$ se cumple que $r \cdot (b - a) = 0$.

PROPOSICIÓN 11. En $\mathbb{R}^3$, dados los vectores $a, r \in \mathbb{R}^3$, existe un único plano P, que pasa por a, tal que r es ortogonal a P. Además,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : r \cdot x = r \cdot a\}.$$

PROPOSICIÓN 12. En $\mathbb{R}^3$, dado el plano $P(a; b, c)$, un vector normal a este es $b \times c$.

EJEMPLO 2. Sean $a = (1, 0, 1)$, $b = (1, 1, 1)$ y $c = (1, 0, -1)$. El plano

$$P(a; b, c)$$

tiene vector normal a

$$b \times c = (-1, 2, -1).$$

Dado que $(1,0,1) \in P(a;b,c)$, se tiene que

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in P(a;b,c) &\iff (x-1, y-0, z-1) \cdot (-1,2,-1) = 0 \\ &\iff -(x-1) + 2y - (z-1) = 0 \\ &\iff -x + 1 + 2y - z + 1 = 0 \\ &\iff x - 2y + z = 2,\end{aligned}$$

esta ecuación es conocida como la *ecuación cartesiana* del plano $P(a;b,c)$.